Całki w elektrodynamice

- → krzywoliniowe
- → powierzchniowe (strumienie)
- → objętościowe

(1) CAŁKI KRZYWOLINIOWE

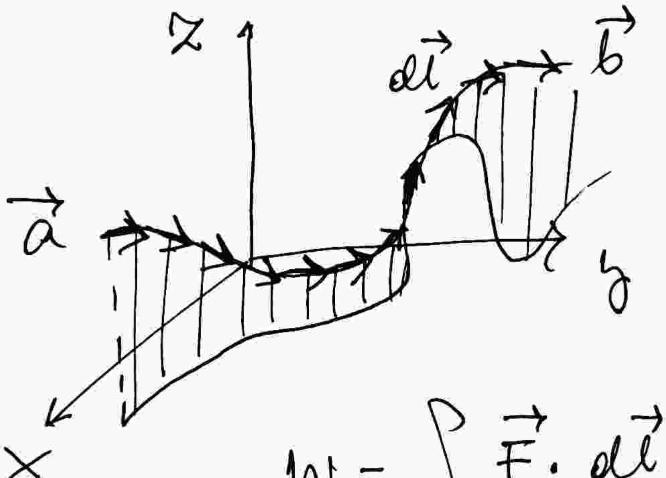
$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

$\vec{v}$ funkcja wektorowa

$d\vec{l}$ wektor infinitezymalnego przesunięcia wzdłuż krzywej od $\vec{a}$ do $\vec{b}$

Gdy krzywa jest zamknięta $(\vec{b} = \vec{a})$

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l}$$



$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

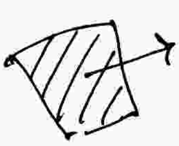
$$W = \int_x F_x\,dx + \int_y F_y\,dy + \int_z F_z\,dz$$

Istnieje ważna klasa funkcji wektorowych, dla których wartości całki krzywoliniowej NIE zależy od drogi całkowania, a jedynie od położenia końców drogi całkowania.

(2) CAŁKI POWIERZCHNIOWE

$$\int_S \vec{v}\cdot d\vec{A}$$

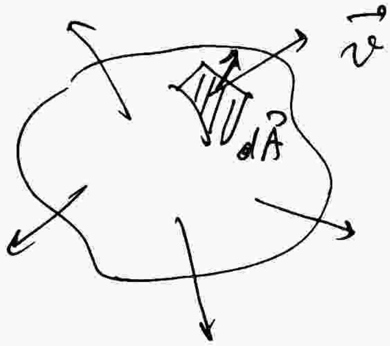
$d\vec{A} \perp$ do pow.



$|d\vec{A}| \equiv$ pole powierzchni wycinka,

Zakładamy, że orientacja 'na zewnątrz' jest dodatnia

$$\oint \vec{v}\cdot d\vec{A}$$



<u>Przykład</u>

$\vec{v}$ opisuje przepływ płynu (masa na jednostkę powierzchni i jednostkę czasu)

$\int_S \vec{v}\cdot d\vec{A}$ to całkowita masa płynu przepływająca przez powierzchnię S w jednostce czasu (STRUMIEŃ)

Istnieje szczególna klasa funkcji wektorowych, dla których taka całka NIE ZALEŻY od wyboru powierzchni, a jedynie od krzywej będącej brzegiem tej powierzchni.

(3) CAŁKI OBJĘTOŚCIOWE

$$\int_V T \, dV$$

T funkcja skalarna

$dV = dx\,dy\,dz$

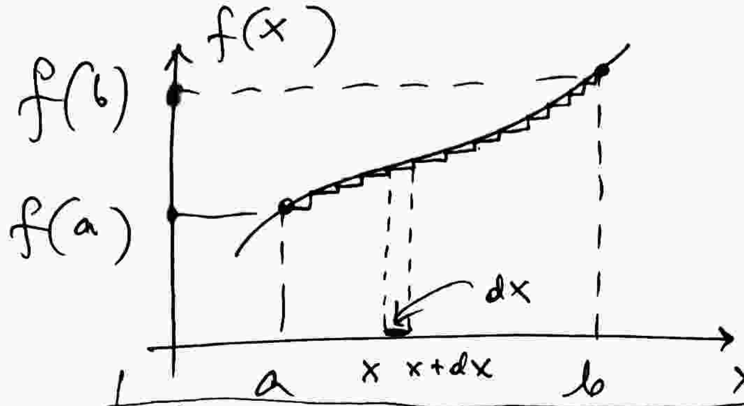
np. $\int_V f(x,y,z)\, dV$ = masa całkowita

niekiedy funkcja wektorowa

$$\int_V \vec{v}\, dV = \int_V \left(v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} \right) dV =$$

$$= \hat{i} \int v_x \, dV + \hat{j} \int v_y \, dV + \hat{k} \int v_z \, dV$$

TWIERDZENIE PODSTAWOWE RACHUNKU CAŁKOWEGO 3 A



$$df = \left(\frac{df}{dx}\right) dx$$

zmiana f przy zmianie $x \to x + dx$

$$\boxed{\int_a^b \underset{\substack{|||\\ F(x)}}{\left(\frac{df}{dx}\right)} dx = f(b) - f(a)}$$

Gdy podzielimy przedział $\langle a, b \rangle$ na wiele małych odcinków dx i dodamy przyrosty df z każdego odcinka, to wynik równy jest całkowitej zmianie f: $f(b) - f(a)$

Istnieją 2 sposoby na określenie całkowitej zmiany $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$:

(1) różnica na krańcach przedziału

(2) sumowanie małych zmian funkcji krok po kroku, dodając małe przyrosty w miarę przesuwania się wzdłuż krzywej.

SCHEMAT: Pochodna scałkowana po odcinku daje różnicę funkcji na końcach przedziału (granicach).

$T(x,y,z)$ funkcja skalarna

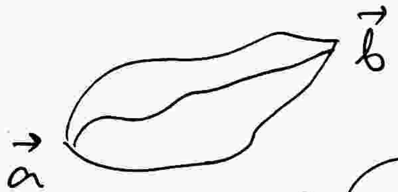
$$\boxed{\int_{\vec a}^{\vec b} (\vec\nabla T)\cdot d\vec l = T(\vec b) - T(\vec a)}$$

podstawowe twierdzenie dla gradientów

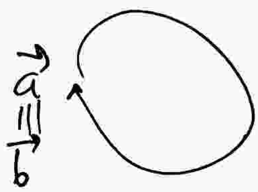
$$\left(\int_a^b F(x)\,dx = f(b) - f(a) \qquad F(x) = \frac{df}{dx}\right)$$

Funkcje wektorowe będące gradientami funkcji skalarnych mają tę szczególną własność, że całki krzywoliniowe z takich funkcji nie zależą od drogi całkowania.

$$\int_{\vec a}^{\vec b} (\vec\nabla T)\cdot d\vec l$$



$$\oint (\vec\nabla T)\cdot d\vec l = 0$$



$$\int_{\vec a}^{\vec b} (\vec\nabla V)\cdot d\vec l = -\int_{\vec a}^{\vec b} \vec E\cdot d\vec l = V(\vec b) - V(\vec a)$$

Podstawowe twierdzenie dla dywergencji

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{v})\, dV = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

twierdzenie Gaussa
twierdzenie Greena
twierdzenie o dywergencji

Całka z pochodnej (dywergencji) po obszarze (objętości) wyraża się przez wartość funkcji na brzegu tego obszaru (powierzchni ograniczającej obszar całkowania).

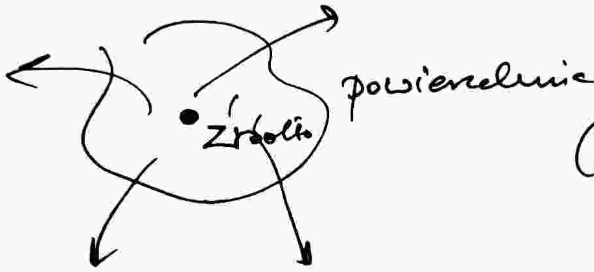
Uwaga: człon brzegowy także jest tutaj całką, a konkretnie całką powierzchniową.

- "brzeg" odcinka krzywej to 2 punkty
- brzeg obszaru przestrzennego to (zamknięta) powierzchnia.

Jeżeli $\vec{v}$ przedstawia rozkład prędkości płynu nieściśliwego, to strumień $\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{A}$ równy jest całkowitej objętości płynu przepływającego przez powierzchnię w jednostce czasu.
Dywergencja $\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})\, dV$ to "źródło" płynu

Idea

Objętość wypływającego płynu można określić na 2 sposoby



(1) zliczając wszystkie źródła i dodając ich wydajność (dywergencja)

(2) mierząc i dodając przepływ płynu w każdym punkcie powierzchni ograniczającej obszar

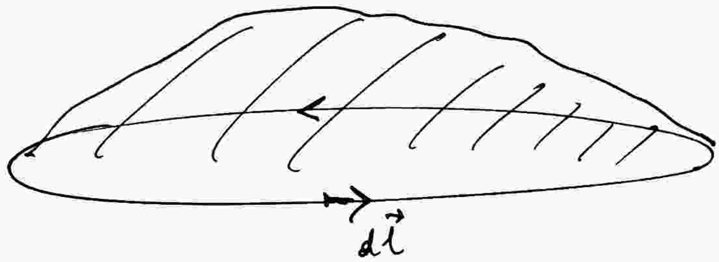
$\int$ (źródła (+) i (−) wewnątrz powierzchni)

$= \oint$ (gęstość strumienia przez powierzchnię

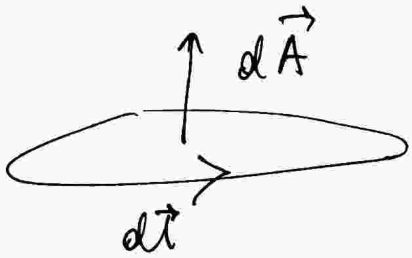
ISTOTA TWIERDZENIA O DYWERGENCJI

Podstawowe twierdzenie o rotacji (Tw. Stokesa)

$$\boxed{\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{v})\cdot d\vec{A} = \oint_P \vec{v}\cdot d\vec{l}}$$



Strumień rotacji przez powierzchnię odpowiada "całkowitej wirowości" wzdłuż brzegu



Konwencja znaku

Istnieje ∞ wiele powierzchni o tym samym brzegu (bańki mydlane ~~na~~ rozpięte na brzegu drucianej pętli)

Istotna jest klasa funkcji wektorowych $\vec{v}$ dla których $\int(\vec{\nabla}\times\vec{v})\cdot d\vec{A}$ jest równy całce krzywoliniowej z $\vec{v}$ po <u>brzegu</u> powierzchni, przy czym brzeg ten nie zależy od wyboru powierzchni.

(1) $\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{A}$ nie zależy od kształtu powierzchni, a jedynie od krzywej będącej jej brzegiem.

(2) $\oint_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{A} = 0$ ponieważ tutaj brzeg powierzchni zredukowany jest do punktu.

(porównaj twierdzenie podstawowe o gradientach)

Resumé

8

Analiza wektorowa

3 typy pochodnych:

gradient $\vec{\nabla} f(x,y,z)$

dywergencja $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$

rotacja $\vec{\nabla} \times \vec{G}$

dla każdego typu pochodnej istnieje "twierdzenie podstawowe".

$$\int_a^b \left(\frac{df}{dx}\right) dx = f(b) - f(a)$$

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} (\vec{\nabla} V) \cdot d\vec{l} = V(\vec{b}) - V(\vec{a})$$

całka krzywoliniowa

wartości funkcji na brzegu

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})\, dV = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

w formie całki

całka objętościowa

wartość funkcji na brzegu (powierzchni ograniczającej)

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{A} = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

w formie całki

wartość funkcji na brzegu ("powierzchni ograniczającej)